Marco Moriconi
Notas de MQ1 - 1
April 1, 2010

1 Operadores de Espectro Contínuo

Em sala de aula discutimos rapidamente o operadores de espectro contínuo. Aqui faremos um resumo das ideias discutidas.

O problema que queremos tratar é entender o significado de autoestados de operadores de espectro contínuo. Por exemplo, se considerarmos o operador posição, queremos saber como tratá-lo, interpretá-lo e, em particular, usá-lo.

Inicialmente, imagine que discretizamos a linha real em uma série de sítios separados por uma distância Δ, e que a nossa partícula salta de um ponto para o outro. No momento a dinâmica não é importante, ainda estamos fazendo cinemática quântica. O observável correspondente, $\hat{x}$ possuirá autovalores x_i associados a kets $|x_i\rangle$. Como esperado, neste caso temos $\langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij}$. Se o estado de nossa partícula é descrito pelo raio $|\psi\rangle$, então a probabilidade de encontrá-la em um certo sítio $|x_j\rangle$ é dado, pelas regras da mecânica quântica, por $P(x_i) = |\langle x_i|\psi\rangle|^2$. No limite em que $\Delta \to 0$ essa informação é irrelevante, o que importa, de fato, é saber se a partícula se encontra em um certo intervalo Δx ao redor de x. Suponha que neste intervalo temos os pontos x_i com $i = a, a+1, \ldots, b-1$. Queremos calcular a probabilidade de encontrar a partícula em um destes pontos. Isso é dado simplesmente por

$$P(\bar{x}; \Delta x) = \sum_{i=a}^{b} P(x_i) = \sum_{i=a}^{b} |\langle x_i|\psi\rangle|^2 \approx |\langle \bar{x}|\psi\rangle|^2 (b-a) \tag{1}$$

onde usamos que, para um intervalo pequeno, as probabilidades $P(x_i)$ são aproximadamente iguais a $P(\bar{x})$ para algum ponto no interior do intervalo, e que neste intervalo temos $b-a$ pontos. Podemos prosseguir e reescrever

$$|\langle \bar{x}|\psi\rangle|^2 (b-a) = |\langle \bar{x}|\psi\rangle|^2 (b-a)\Delta \frac{1}{\Delta} = |(\langle \bar{x}|\frac{1}{\sqrt{\Delta}})|\psi\rangle|^2 \Delta x, \tag{2}$$

omde introduzimos $(b-a)\Delta = \Delta x$. Se denotarmos agora os estados $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}|x_i\rangle$ por $|q_i\rangle$ vemos que nossa expressão da probabilidade $P(x_i)$ fornece

$$P(x_i) \to P(q_i) = |\langle q|\psi\rangle|^2 \Delta x \tag{3}$$

Assim, podemos interpretar $|\langle q|\psi\rangle|^2$ como uma densidade de probabilidade. Para calcularmos a probabilidade de encontrar a partícula em um certo intervalo devemos integrar esta amplitude neste intervalo. O preço que temos que pagar é introduzir estados $|q\rangle$ que não são normalizáveis, pois:

$$\langle q_i|q_j\rangle = \frac{1}{\Delta}\delta_{ij} \tag{4}$$

Resta entender o significado desta normalização no limite $\Delta \to 0$. Essencialmente, se $\langle q_i|q_j\rangle \to \langle q|q'\rangle = f(q,q')$, então, que objeto matemático é $f(q,q')$? Para isso, note que, considerando uma função $F(q)$ qualquer, se calcularmos

$$\int_a^b F(q)f(q,q')dq = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} F((b-a)\frac{k}{n}+a)f((b-a)\frac{k}{n}+a,q_j)\Delta \tag{5}$$

que é 0 se q' está fora do intervalo $[a,b]$ e $F(q')$ se q' está no intervalo $[a,b]$. Podemos concluir, portanto, que $f(q,q') = \delta(q-q')$.